TD n°3: Formule de Stokes et théorie de Cauchy

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-3-5-6-7-4. Les exercices marqués d'un [1] sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

La formule de Stokes

Exercice 1. Formule de Stokes holomorphe-antiholomorphe.
Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact à bord C^1 par morceaux, f, g des fonctions C^1 définies au voisinage de K. Montrer que la formule de Stokes se réécrit :

$$\int_{\partial K} f(z)dz + g(z)d\overline{z} = 2i \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dxdy$$

Exercice 2. Aires de polygones réguliers.
On désire calculer l'aire du n-gone régulier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe dans $\mathbb{C}$ des racines n-èmes de l'unité. On note P_n le polygone, A_n son aire et on fixe $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

1. Vérifier que le bord ∂P_n est paramétré par les n chemins
$$\gamma_j : t \mapsto \zeta_n^j \big(1 + t(\zeta_n - 1)\big)$$
pour $j = 0, ..., n-1$.

2. Montrer en utilisant la formule de Stokes que
$$A_n = \frac{1}{2i} \int_{\partial P_n} \overline{z} dz.$$

3. Démontrer que
$$\int_{\gamma_j} \overline{z} dz = i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$
et conclure.

Exercice 3. Le théorème de la divergence.
On désire prouver, à partir de la formule de Stokes, le théorème de la divergence. Pour cet exercice, on note $\dot{f}$ la dérivée en t de f.
Théorème de la divergence.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ à bord C^1, U un voisinage de K et $\boldsymbol{F} : U \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs C^1. Alors :

$$\int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) dxdy = \int_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} ds$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale sortante unitaire à ∂K et ds est l'élément de longueur de ∂K, c'est-à-dire $udx + vdy$ où (u, v) est un vecteur tangent au bord de K unitaire et positivement orienté.

1. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ un chemin C^1 de dérivée non-nulle qui paramétrise localement ∂K (avec la bonne orientation). Exprimer la normale sortante unitaire $\boldsymbol{\nu}$, le vecteur tangent unitaire, et les éléments de longueur dx, dy en fonction de $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ et dt.

2. Démontrer que $ds = |\dot{\gamma}(t)|dt$, puis que $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} ds = f dy - g dx$ où $\boldsymbol{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

3. Démontrer que
$$\int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) dxdy = \int_{\partial K} f dy - g dx$$
et conclure.

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Exercice 4. La solution fondamentale du laplacien en dimension deux.
On désire démontrer l'égalité suivante : si $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ à support compact, alors :

$$\int_{\mathbb{C}} \Delta\varphi(z) \log|z| dxdy = 2\pi\varphi(0)$$

On définit l'ouvert $U_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < \varepsilon^{-1}\}$ et on pose T_ε le cercle de centre 0 et de rayon ε.

1. Justifier que l'intégrale converge.
2. Montrer que pour toute fonction C^∞ à support compact φ, on a
$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(z) \log|z| dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{U_\varepsilon} \varphi(z) \log|z| dxdy.$$
3. Montrer que sur un ouvert U à bord C^1 par morceaux, pour f, g fonctions C^2 au voisinage de l'adhérence de U, on a l'égalité
$$\frac{i}{2} \int_U \big[f(z)\Delta g(z) - \Delta f(z) g(z)\big] dxdy = \int_{\partial U} f(z)\partial g(z) dz + \overline{\partial} f(z) g(z) d\overline{z}.$$
4. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :
$$\int_{U_\varepsilon} \Delta\varphi(z) \log|z| dxdy = -2i \int_{T_\varepsilon} \varphi(z)\partial \log|z| dz + \overline{\partial}\varphi(z) \log|z| d\overline{z}.$$
5. Montrer $\partial \log|z| = \frac{1}{2z}$.
6. Estimer les intégrales
$$\int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{it}) dt$$
et
$$\varepsilon \int_0^{2\pi} \overline{\partial}\varphi(\varepsilon e^{it}) \log(\varepsilon) e^{it} dt$$
quand $\varepsilon \to 0$ et conclure.

Calculs d'intégrales par le théorème de Cauchy

Exercice 5. Une première intégrale
Soient $a, b > 0$. On considère la courbe γ donnée par l'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

1. Démontrer que
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

Exercice 6. Intégrales gaussiennes

1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. En intégrant sur un rectangle bien choisi, prouver que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$
et en déduire que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-i\xi x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}.$$

2. En intégrant la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ sur un secteur angulaire bien choisi, prouver la convergence de l'intégrale suivante (au sens faible) et la calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it^2}\, dt$$

Exercice 7. Encore une intégrale
En intégrant $z \mapsto \frac{\log(z)}{1-z}$ sur le bord de $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leqslant 1, |z| \geqslant \varepsilon\}$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(\theta))d\theta$$

Exercice 8. Chemins alternatifs pour la fonction Γ.
On note, pour $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > 0$:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^s e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

1. Vérifier que l'intégrale converge.
   Pour $u \notin \mathbb{R}_{<0}$, on définit $u^s = |u|^s e^{si\arg(u)} = e^{s\log(u)}$, où l'argument est pris entre $-\pi$ et π et le logarithme est compris comme la détermination principale $\log(u) = \log|u| + i\arg(u)$.
2. Soit $z = e^{i\theta}$ de partie réelle strictement positive. Démontrer que

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty (zx)^s e^{-zx} \frac{dx}{x}.$$

3. Soit $\gamma : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$ de classe C^1 vérifiant :
   (a) $|\gamma(t)| \to \infty$ quand $t \to \infty$
   (b) Il existe des constantes $a > 0, b \in \mathbb{R}$ telles que $|\Im(\gamma(t))| \leqslant a\Re(\gamma(t)) + b$ pour tout $t \geqslant 0$, c'est-à-dire que γ reste dans le secteur délimité par les demi-droites $y = ax + b, y \geqslant 0$ et $y = -ax - b, y \leqslant 0$.
   (c) $\gamma(0) = 0$.

   Montrer que

$$\int_\gamma z^s e^{-z} \frac{dz}{z} = \Gamma(s)$$

   où on comprend $\int_\gamma$ comme $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma|_{[0,R]}}$.

Exercice 9. L'intégrale de Dirichlet
On définit un contour $\gamma_{\varepsilon,R}$ comme suit : $\gamma^1_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i(\pi - t)}$ sur $[0, \pi]$, $\gamma^{2,\pm}_{\varepsilon,R}(t) = \pm t$ sur $[\varepsilon, R]$ et $\gamma^3_R(t) = Re^{it}$ sur $[0, \pi]$.

1. Démontrer que $\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{-it}} dt \to \pi$ quand $\varepsilon \to 0$.
2. En minorant $\sin(t)$ par $2t/\pi$ sur $[0, \pi/2]$, démontrer que

$$\int_0^\pi e^{-R\sin(t)} dt = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

3. En déduire que

$$\int_{\gamma^{2,-}_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma^{2,+}_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\int_{\gamma^1_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

4. Démontrer que

$$\int_{\gamma^{2,-}_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma^{2,+}_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

5. En déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$